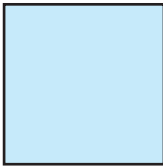
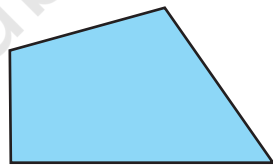
अध्याय 9

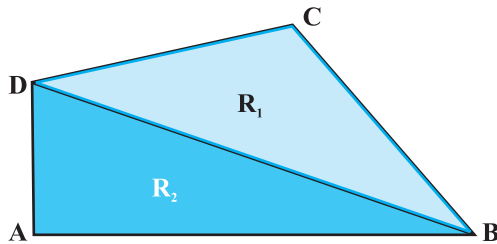
समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

किसी बंद समतल आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति के अंदर के क्षेत्र का माप होता है:

आकृति 9.1

छायांकित भाग (आकृति 9.1) वे क्षेत्र निरूपित करते हैं जिनके क्षेत्रफल सरल ज्यामितीय परिणामों का प्रयोग करके निर्धारित किए जा सकते हैं। ऐसी आकृतियों के क्षेत्रफलों को मापने के लिए एक वर्ग इकाई (या मात्रक) मानक इकाई है।

- यदि Δ ABC $\cong$ Δ PQR है, तो ar (Δ ABC) = ar (Δ PQR) होता है।

  समतल आकृति ABCD का कुल क्षेत्रफल R दोनों त्रिभुजाकार क्षेत्रों R_1 और R_2, के योग के बराबर है, अर्थात् ar (R) = ar (R_1) + ar (R_2) है (आकृति 9.2)।

आकृति 9.2

- दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं परंतु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।
- एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- (i) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज, क्षेत्रफल में, बराबर होते हैं।

  (ii) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बना एक समांतर चतुर्भुज और एक आयत क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- समान आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- समान आधारों और समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब समान होते हैं।
- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने आयत/समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
- यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए –

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : 12 cm और 16 cm विकर्णों वाले एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से बनी आकृति का क्षेत्रफल है

(A) 48 cm^2 (B) 64 cm^2 (C) 96 cm^2 (D) 192 cm^2

हल : उत्तर (A)

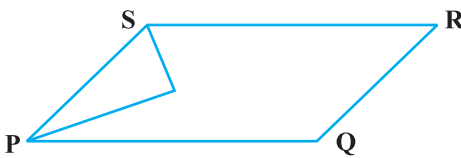
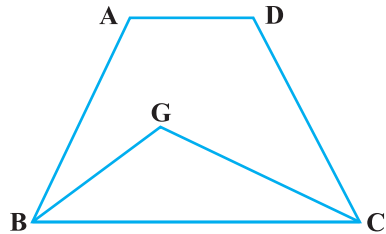
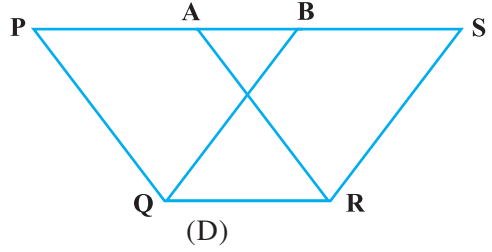
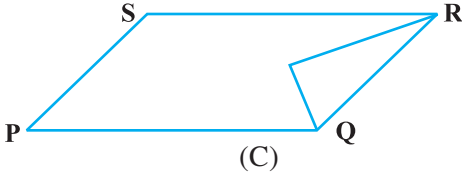
प्रश्नावली 9.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए –

1. एक त्रिभुज की माध्यिका उसे विभाजित करती है, दो

(A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में (B) सर्वांगसम त्रिभुजों में

(C) समकोण त्रिभुजों में (D) समद्विबाहु त्रिभुजों में

2. निम्नलिखित आकृतियों (आकृति 9.3) में से किसमें आप एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच, बने दो बहुभुज प्राप्त करते हैं:

(A)

(B)

आकृति 9.3

3. 8 cm और 6 cm भुजाओं वाले एक आयत की आसन्न भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने से बनी आकृति है :

(A) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक आयत (B) 25 cm^2 क्षेत्रफल का एक वर्ग

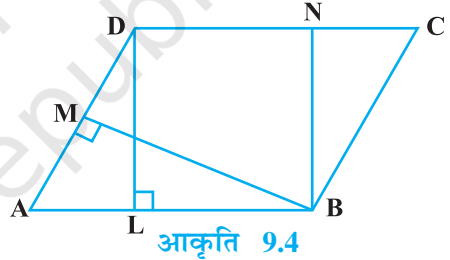
(C) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक समलंब (D) 24 cm^2 क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज

4. आकृति 9.4 में, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है:

(A) $AB \times BM$

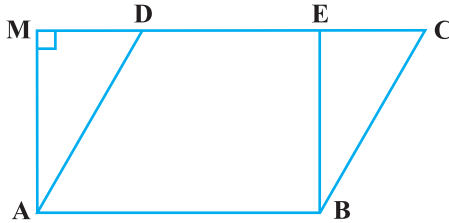
(B) $BC \times BN$

(C) $DC \times DL$

(D) $AD \times DL$

आकृति 9.4

5. आकृति 9.5 में, यदि समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEM समान क्षेत्रफल के हैं, तो :

(A) ABCD का परिमाप = ABEM का परिमाप

(B) ABCD का परिमाप < ABEM का परिमाप

आकृति 9.5

(C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप

(D) ABCD का परिमाप $= \frac{1}{2}$ (ABEM का परिमाप)

6. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु किसी भी एक शीर्ष को चौथा बिंदु लेकर एक समांतर चतुर्भुज बनाते हैं, जिसका क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\frac{1}{2}$ ar (ABC) (B) $\frac{1}{3}$ ar (ABC)

(C) $\frac{1}{4}$ ar (ABC) (D) ar (ABC)

7. दो समांतर चतुर्भुज बराबर आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 1 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1

8. ABCD एक चतुर्भुज है जिसका विकर्ण AC उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है। तब, ABCD

(A) एक आयत है (B) सदैव एक समचतुर्भुज है

(C) एक समांतर चतुर्भुज है (D) (A), (B) या (C) में से कोई भी होना आवश्यक नहीं

9. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं, तो त्रिभुज के क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से अनुपात है

(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 4

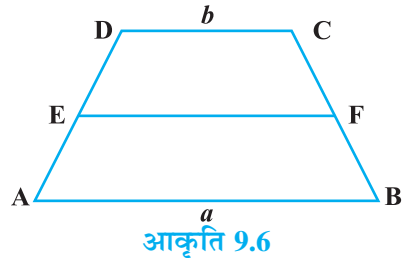
10. ABCD एक समलंब है जिसकी समांतर भुजाएँ AB = a cm और DC = b cm है (आकृति 9.6)। E और F असमांतर भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। ar (ABFE) और ar (EFCD) का अनुपात हैं

(A) $a : b$

(B) $(3a + b) : (a + 3b)$

(C) $(a + 3b) : (3a + b)$

(D) $(2a + b) : (3a + b)$

आकृति 9.6

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

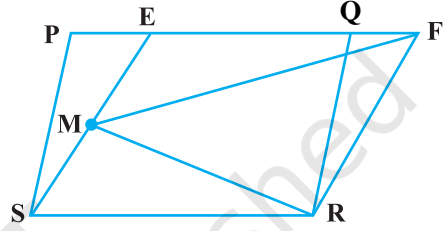
सत्य या **असत्य** लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि P किसी त्रिभुज ABC की माध्यिका AD पर स्थित कोई बिंदु है, तो ar (ABP) ≠ ar (ACP) है।

हल : असत्य, क्योंकि ar (ABD) = ar (ACD) और ar (PBD) = ar (PCD), और इसीलिए, ar (ABP) = ar (ACP) है।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि आकृति 9.7 में, PQRS और EFRS दो समांतर चतुर्भुज हैं, तो

ar (MFR) = $\frac{1}{2}$ ar (PQRS) है।

हल : सत्य, क्योंकि ar (PQRS) = ar (EFRS) = 2 ar (MFR) है।

आकृति 9.7

प्रश्नावली 9.2

***सत्य** या **असत्य** लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए –*

1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज और X भुजा AB का मध्य-बिंदु है। यदि ar (AXCD) = 24 cm^2 है तो ar (ABC) = 24 cm^2 है।

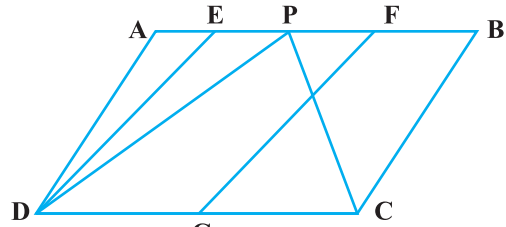
2. PQRS एक आयत है, जो त्रिज्या 13 cm वाले एक वृत्त के चतुर्थांश के अंतर्गत है। A भुजा PQ पर स्थित कोई बिंदु है। यदि PS = 5 cm है, तो ar (PAS) = 30 cm^2 है।

3. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल 180 cm^2 है तथा A विकर्ण QS पर स्थित कोई बिंदु है। तब Δ ASR का क्षेत्रफल 90 cm^2 है।

4. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। तब,

ar (BDE) = $\frac{1}{4}$ ar (ABC) है।

5. आकृति 9.8 में, ABCD और EFGD दो समांतर चतुर्भुज हैं तथा G भुजा CD का मध्य-बिंदु है। तब,

ar (DPC) = $\frac{1}{2}$ ar (EFGD) है।

आकृति 9.8

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : PQRS एक वर्ग है। T और U क्रमशः PS और QR के मध्य-बिंदु हैं (आकृति 9.9)। Δ OTS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 8 cm है तथा O रेखाखंड TU और QS का प्रतिच्छेद बिंदु है।

आकृति 9.9

हल : PS = PQ = 8 cm है तथा TU || PQ है।

$$ST = \frac{1}{2} PS = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

साथ ही, PQ = TU = 8 cm

इसलिए, $OT = \frac{1}{2} TU = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$

अतः, ΔOTS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times ST \times OT$ [क्योंकि OTS एक समकोण त्रिभुज है]

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : ABCD एक समांतर चतुर्भुज तथा BC को Q तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि AD = CQ है (आकृति 9.10)। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करता है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ)

हल: ar (ACP) = ar (BCP) (1)

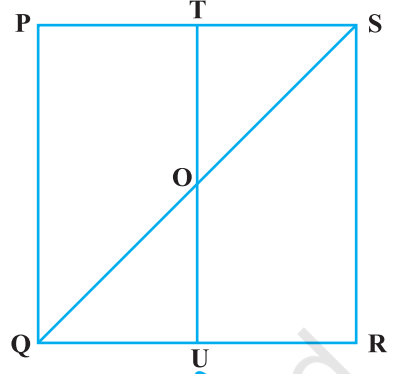
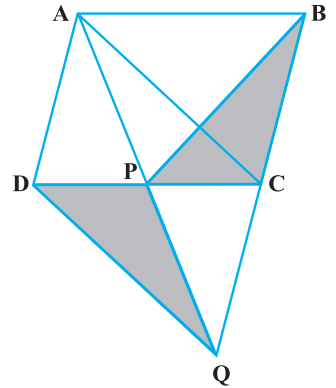
[एक आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने दो त्रिभुज]

ar (AOQQ) = ar (ADC) (2)

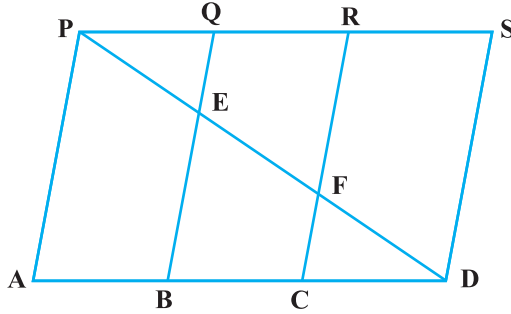
ar (ADC) – ar (ADP) = ar (AOQQ) – ar (ADP)

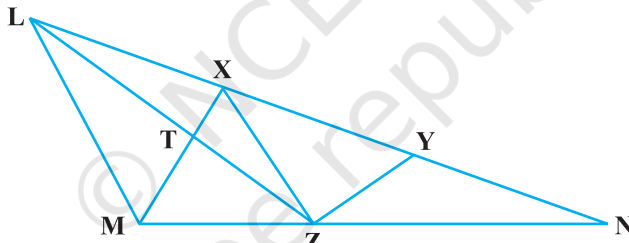
अतः, ar (APC) = ar (DPQ) (3)

(1) और (3) से, हमें प्राप्त होता है:

ar (BCP) = ar (DPQ)

आकृति 9.10

प्रश्नावली 9.3

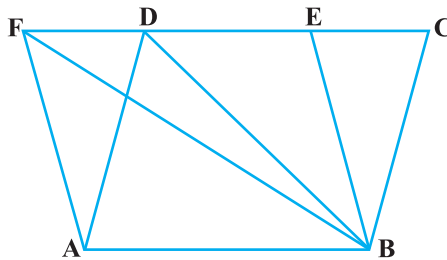
1. आकृति 9.11 में, PSDA एक समांतर चतुर्भुज है। PS पर बिंदु Q और R इस प्रकार लिए गए हैं कि PQ = QR = RS है। तथा PA || QB || RC है। सिद्ध कीजिए कि ar (PQE) = ar (CFD) है।

आकृति 9.11

2. X और Y त्रिभुज LMN की भुजा LN पर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि LX = XY = YN हैं। X से होकर जाती हुई एक रेखा LM के समांतर खींची गई जो MN को Z पर मिलती है (देखिए आकृति 9.12)। सिद्ध कीजिए कि ar (LZY) = ar (MZYX) है।

आकृति 9.12

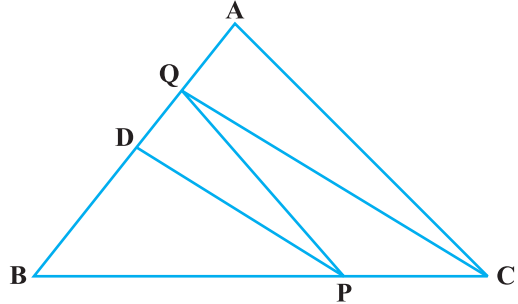
3. समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 90 cm^2 है (आकृति 9.13)। ज्ञात कीजिए:

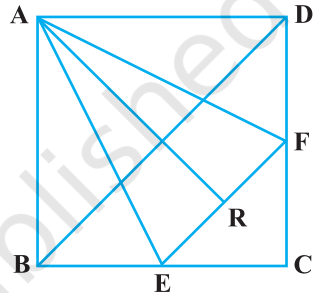
(i) ar (ABEF)

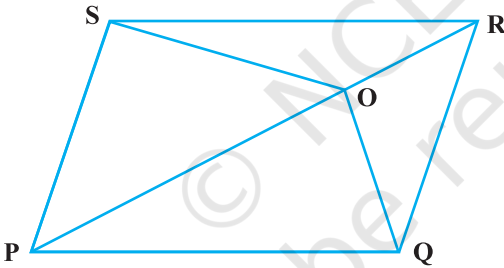
(ii) ar (ABD)

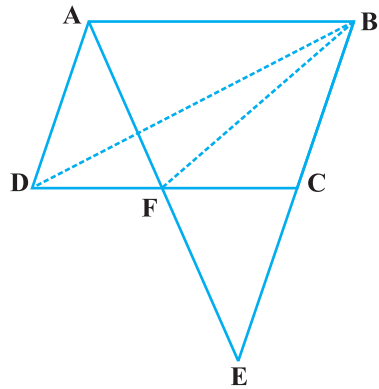
(iii) ar (BEF)

आकृति 9.13

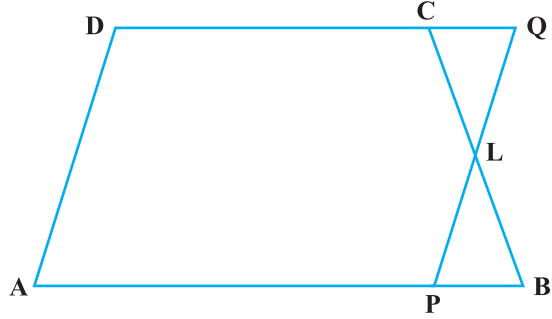
4. Δ ABC, D भुजा AB का मध्य-बिंदु है तथा P भुजा BC पर स्थित कोई बिंदु है। यदि रेखाखंड CQ $\parallel$ PD भुजा AB से Q पर मिलता है (आकृति 9.14), तो सिद्ध कीजिए कि

ar (BPQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC) है।

आकृति 9.14

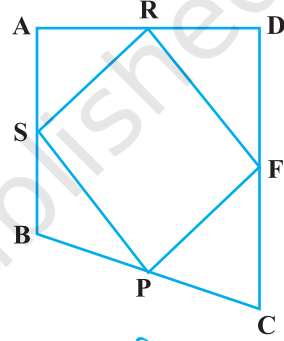
5. ABCD एक वर्ग है। E और F क्रमशः BC और CD भुजाओं के मध्य-बिंदु हैं। यदि R रेखाखंड EF का मध्य-बिंदु है (आकृति 9.15), तो सिद्ध कीजिए कि ar (AER) = ar (AFR) है।

आकृति 9.15

6. O एक समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई बिंदु है (आकृति 9.16)। सिद्ध कीजिए कि ar (PSO) = ar (PQO) है।

आकृति 9.16

7. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें BC को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CE = BC है (आकृति 9.17)। AE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। यदि ar (DFB) = 3 cm^2 है, तो समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 9.17

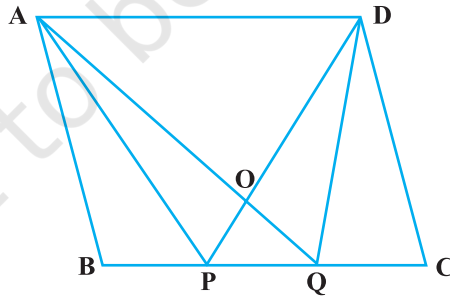
8. एक समलंब ABCD में, AB || DC है तथा L भुजा BC का मध्य-बिंदु है। L से होकर, एक रेखा PQ || AD खींची गई है, जो AB को P पर और बढ़ाई गई DC को Q पर मिलती है (आकृति 9.18), सिद्ध कीजिए ar (ABCD) = ar (APQD)

आकृति 9.18

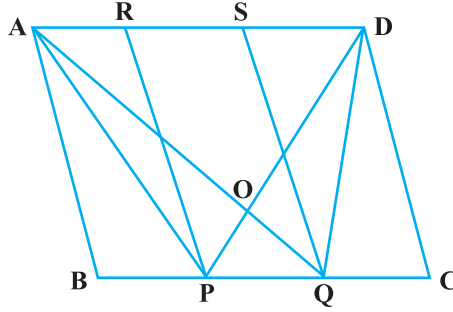
9. यदि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को क्रम से मिलाया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है (आकृति 9.19)।

[संकेत: BD को मिलाइए और A से BD पर लंब खींचिए।]

आकृति 9.19

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : आकृति 9.20 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। बिंदु P और Q भुजा BC को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि ar (APQ) = ar (DPQ) = $\frac{1}{6}$ ar(ABCD) है।

आकृति 9.20

हल : P और Q से होकर, AB के समांतर PR और QS खींचिए (आकृति 9.21)। अब, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसका आधार PQ = $\frac{1}{3}$ BC है।

आकृति 9.21

$\text{ar (APD)} = \frac{1}{2} \text{ar (ABCD)}$ [एक ही आधार BC और BC ∥ AD] (1)

$\text{ar (AQD)} = \frac{1}{2} \text{ar (ABCD)}$ (2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) = ar (AQD) (3)

दोनों पक्षों में से ar (AOD) घटाने पर, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) – ar (AOD) = ar (AQD) – ar (AOD)

ar (APO) = ar (OQD), (4)

(4) के दोनों पक्षों में ar (OPQ) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है:

ar (APO) + ar (OPQ) = ar (OQD) + ar (OPQ)

ar (APQ) = ar (DPQ)

क्योंकि, $\text{ar (APQ)} = \frac{1}{2} \text{ar (PQRS)}$, इसलिए

$\text{ar (DPQ)} = \frac{1}{2} \text{ar (PQRS)}$

अब, $\text{ar (PQRS)} = \frac{1}{3} \text{ar (ABCD)}$

अत:, ar (APQ) = ar (DPQ)

$= \frac{1}{2} \text{ar (PQRS)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ar (ABCD)}$

$= \frac{1}{6}$ ar (ABCD)

आकृति 9.22

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 9.22 में, l, m, और n, सरल रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $l \parallel m$ है तथा n रेखा l को P पर तथा m को Q पर प्रतिच्छेद करती है। ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि शीर्ष A, रेखा l पर स्थित है, शीर्ष C और D रेखा m पर स्थित हैं तथा AD $\parallel n$ है। दर्शाइए कि

ar (ABCQ) = ar (ABCDP)

हल : ar (APD) = ar (AQD) (1)

[एक ही आधार AD पर है तथा एक ही समांतर रेखाओं AD और n के बीच में स्थित है].

(1) के दोनों पक्षों में ar (ABCD) जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है

ar (APD) + ar (ABCD) = ar (AQD) + ar (ABCD)

या ar (ABCDP) = ar (ABCQ) है।

आकृति 9.23

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 9.23 में, BD $\parallel$ CA है, E रेखाखंड CA का मध्य-बिंदु है तथा BD = $\frac{1}{2}$ CA है।

सिद्ध कीजिए कि ar (ABC) = 2ar (DBC) है।

हल : DE को मिलाइए। यहाँ BCED एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि

BD = CE और BD $\parallel$ CE है।

ar (DBC) = ar (EBC) (1)

[एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं की बीच में है]

Δ ABC में, BE एक माध्यिका है।

अतः, ar (EBC) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC)

अब, ar (ABC) = ar (EBC) + ar (ABE)

इसलिए, ar (ABC) = 2 ar (EBC),

अतः, ar (ABC) = 2 ar (DBC) [(1) से]

प्रश्नावली 9.4

1. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर कोई बिंदु E लिया जाता है। AE और DC को बढ़ाया जाता है जिससे वे F पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ADF) = ar (ABFC) है।

2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो AD को P और BC से Q पर मिलती है। दर्शाइए कि PQ इस समांतर चतुर्भुज ABCD को बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ BE और CF परस्पर बिंदु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि Δ GBC का क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE के क्षेत्रफल के बराबर है।

4. आकृति 9.24 में, CD || AE और CY || BA है। सिद्ध कीजिए कि ar (CBX) = ar (AXY) है।

आकृति 9.24

5. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC, DC = 30 cm और AB = 50 cm है। यदि X और Y क्रमशः AD और BC के मध्य-बिंदु हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{ar (DCYX)} = \frac{7}{9}\ \text{ar (XYBA)}$$ है।

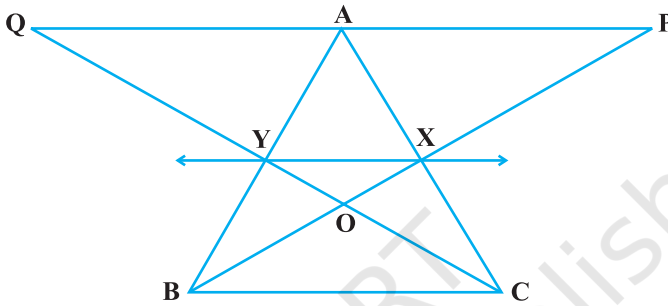
6. त्रिभुज ABC में यदि L और M क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित बिंदु हैं कि LM || BC है। सिद्ध कीजिए कि ar (LOB) = ar (MOC) है।

7. आकृति 9.25 में, ABCDE एक पंचभुज है। AC के समांतर खींची गई BP बढ़ाई गई DC को P पर तथा AD के समांतर खींची गई EQ बढ़ाई गई CD से Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ABCDE) = ar (APQ) है।

आकृति 9.25

8. यदि एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ G पर मिलती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{ar (AGB)} = \text{ar (AGC)} = \text{ar (BGC)} = \frac{1}{3}\ \text{ar (ABC)}$$ है।

9. आकृति 9.26 में, X और Y क्रमशः AC और AB के मध्य-बिंदु हैं, QP ∥ BC और CYQ और BXP सरल रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ABP) = ar (ACQ) है।

आकृति 9.26

10. आकृति 9.27 में, ABCD और AEFD दो समांतर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (PEA) = ar (QFD) है। [संकेत : PD को मिलाइए।]

आकृति 9.27